



TITLE:

速いダイナミクスから遅いダイ
ナミクスへの情報伝搬(2000年度
基礎物理学研究所研究会「大自由
度進化モデルの力学系研究」,研究
会報告)

AUTHOR(S):

藤本, 仰一

CITATION:

藤本, 仰一. 速いダイナミクスから遅いダイナミクスへの情報伝搬(2000年度基礎物理学研究所研究会「大自由度進化モデルの力学系研究」,研究会報告). 物性研究 2001, 77(3): 591-600

ISSUE DATE:

2001-12-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/97135>

RIGHT:

速いダイナミックスから遅いダイナミックスへの情報伝搬

東京大学 総合文化研究科 広域科学専攻 藤本 仰一¹

1 Introduction

階層的な系を豊かな時間構造を持つ系と捉えて、力学系としてどのような理論研究や概念化を行っていくことが面白いかを偏見的に紹介する。

1.1 Scale Interference

発生、発達 [1]、進化 (含む非生命系 [2])、適応や学習等の生物情報処理 [3, 4]、気象、化学反応 [5, 6] が有する豊かな時間構造に対し、異なるスケール間の相互作用や各スケールを統合するロジックの構築の重要性は今さら改めて言うまでもないことである。生態学の問題としても、時間空間スケールが広く分布していて、それを貫くロジックを構築することの重要性は、近年高まってきている [7, 8]。

このような系の特徴を抽出する指導原理として、Haken により提唱された隷属化原理 [9] がある。この原理の基礎には断熱近似があり、その精神は、“速い変数はその平均+ノイズと見て、遅い変数の変化のみに注目せよ”というものである。これは、多変数の振舞を扱う統計物理学や非線形解析学で、非常に有効で重要な役割を果たしている。速い変数と遅い変数のスケールが十分に離れている場合には断熱近似の有効性は揺るぎ無いが、上記の如く様々なスケールが混在して各スケール差が縮まってくるとその近似は有効ではなくなる。

神経系を例にとると、従来の強化学習の考え方では、速いスケールの入力 (発火) の性質はその回数、即ち、積分値として、遅いスケールの記憶 (シナプスのつなぎ換え) のダイナミクスへ影響を与える。これは、速い変数はその平均+ノイズと見よという正に断熱近似の考え方である。この枠組では速いダイナミクスの動的な性質は遅いスケールの記憶構造には反映され得ず、また、両者の時間スケール差が小さいことが実験的に近年見出され、断熱近似描像の有効性が揺らいでいる。このような状況では、どのような異スケール間の“つなぎ”としての記憶生成が行われているのだろうか？むしろ、異スケール間に生じるコヒレンスを積極的に利用する機構があり得るのではないか？

このような問題意識の下、本論では、“どのような場合に速いダイナミックスの方が重要な役割 (relevant) をするか？、その場合に、速いダイナミックスの性質は、どのように時間スケールを変換されて遅いダイナミックスへと伝搬されるか？”と問題を設定して、以下の数理モデルを用いて非線形力学系の立場から一般的な理論の構築を試みる。

1.2 Model

『速い変数の統計的性質に、遅い変数の統計的性質が依存する』性質を探索すべく、様々な時間スケールのダイナミックスが何桁にもわたって混在し互いに影響を及ぼしあうモデルを以下に導入する。即ち、トポロジカルな性質が同じ非線形振動子を複数個用意し、それらの時間スケ-

¹E-mail: fujimoto@complex.u-tokyo.ac.jp

ルのみに異なりを導入して結合する。スケールの異なりは等比級数的に分布させる。各素子の非線形振動子を

$$\frac{d\vec{X}_i}{dt} = \vec{F}(\gamma, \vec{X}) \quad (1)$$

とする。その時間微分項に変数変換を施して、

$$\begin{cases} T_i \frac{d\vec{X}_i}{dt} = \vec{F}(\gamma, \vec{X}_i) \\ T_i \equiv T_1 \tau^{i-1}, \quad \tau > 1, \quad T_i > T_{i-1} \end{cases} \quad (2)$$

とし、それらを近い時間スケールを持つ素子と結合して、

$$T_i \frac{d\vec{X}_i}{dt} = \vec{G}(\vec{F}(\gamma, \vec{X}_i), \vec{X}_{i-1}, \vec{X}_{i+1}) \quad (3)$$

とする。 \vec{X} は各素子の変数で、各素子 i ($= 1, 2, \dots, L \equiv \text{system size}$) の特徴的な時間スケールは $T_i > T_{i-1}$ で、 i が大きいほど遅いダイナミクスになる。この形態は、乱流のエネルギーカスケード等の研究に用いられている shell model[10] と似ている。

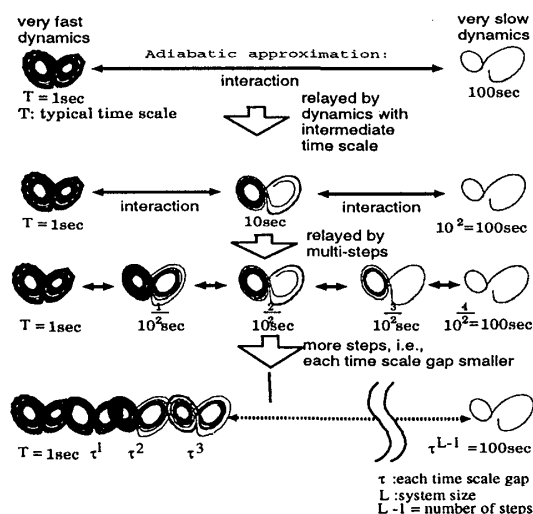


図 1: モデルの概念図。

このモデルでは、非線形パラメーター γ (各素子の統計的性質に対応)、 $\tau > 1$, 素子間の結合強度の3つのパラメーターを持つ。トータルの時間スケール差を $T_{total} \equiv \tau^{L-1} = 100$ と一定にして、以下の数値実験を行う。

数値実験：一番速い素子 ($i = 1$) の制御パラメータのみを変えて、一番速い素子に分岐を起こした場合に、一番遅い素子 ($i = L$) の遅い時間スケールの定性的 (統計的) 性質に変化が起こるかどうを見る。※関係する性質として、カオスなどが持つ不安定性がある。カオスは、ミクロスケールの揺らぎがマクロスケールに増幅されるが、この場合に増幅されるのはあくまで揺らぎであって統計的性質ではなく、これに加えて何らかの機構を提示することが本論の目標である。

まず、隣あう時間スケールの素子間とのコヒーレンスが、引き込みによる場合を紹介し、次に移流不安定性による場合を紹介する。本論で述べる力学系の研究の心とは、冒頭に述べた系の階層構造を時間スケールが適当に分布した系として与え、各階層を動的に統合する論理の1つとして上記の性質を追求するということである。

2 引き込みを介して

個々の非線形振動子に、Lorenz 方程式、Rössler 方程式などを用い、隣の振動子との間に引き込みとそれを壊すカオス的な不安定性が拮抗する状況で上記の性質を満たし得ることを示し、それらに必要な性質を述べる。

まず、1つの振動子(式(1))として Lorenz 方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = f_x(\vec{X}) \equiv 10(y - x) \\ \dot{y} = f_y(\vec{X}) \equiv -xz + rx - y \\ \dot{z} = f_z(\vec{X}) \equiv xy - \frac{8}{3}z \end{cases} \quad (4)$$

を使った場合について述べる [11]。 $\vec{X} \equiv (x, y, z)$, $\vec{F}(\vec{X}) = (f_x(\vec{X}), f_y(\vec{X}), f_z(\vec{X}))$ である。これを、式(2)の通りに時間スケール変換して、式(3)の結合は、

$$T_i \frac{d\vec{X}_i}{dt} = \vec{F}((\mathbf{E} - \mathbf{D})\vec{X}_i + \frac{1}{2}\mathbf{D}(\vec{X}_{i-1} + \vec{X}_{i+1})) \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_x & 0 & 0 \\ 0 & d_y & 0 \\ 0 & 0 & d_z \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$d_y = 0$, $d_x = d_z = d = 0.49$ とする。

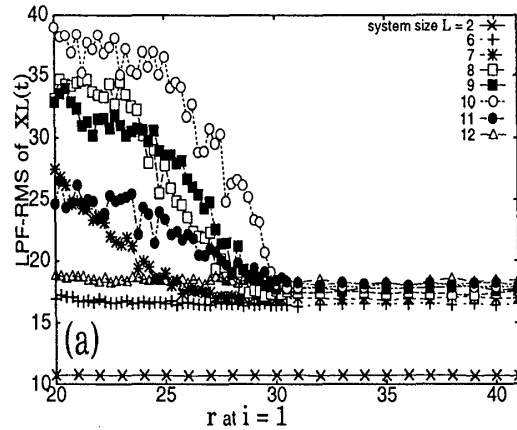


図 2:

図 2は、前節で説明した数値実験の結果を示している。横軸に一番速い素子($i = 1$)の制御パラメータ、縦軸に遅いスケールの統計的性質として、一番遅い素子の時系列から高周波成分を除去した²分散を示す。凡例に示すようにマークは $T_{total} = 100$ の下での (L, τ) に対応する。(時系列で見た依存性については、文献 [11] を参照。)

依存性があるのは、 (L, τ) がある範囲、 $7 \leq L \leq 11$ のみである³。 $L = 2$ は、一番速い振動子と一番遅い振動子を直接結合させた場合で、断熱近似が成立する領域になっており、速い振動子の動的な性質の変化(分岐)に、遅い振動子の遅いスケールの統計的に依存しないのは最も

²速いスケールでの変化の寄与を除き、遅いスケールに現われる変化のみを測定するため。

³ τ を一定のまま、 L を増やしてトータルの時間スケール差を 10^5 程度にしても本論で述べる結果は維持される。重要なのは、 L でなく τ である。

である。 $L \leq 6$ は、このような領域に対応している。 L が大きい場合に依存性が消滅する理由は、まだはっきりとは示せていないが、個々のエレメントがカオス的であることから、 T_{total} 一定下で、 τ を小さくする、即ち、 L を大きくすることは、系全体としてカオスの自由度を高めることになり、カオスによる混合の効果が無視できなくなることに因るであろう。

ここで示したのと同様な現象が、個々のエレメントに Rössler 方程式を用いた場合にも見られ、以下に共通する性質や実験条件を示す。

1. 一番速い素子 ($i = 1$) の制御パラメータの変化により、一番速い素子で分岐を発生させること。
2. 隣あう近い時間スケールの素子の間に coherence(引き込み等) があること。
引き込み理論 [12] と同様、非線形性があり、 τ がそこそこ小さければよい。
3. 分岐カスケード：これを実現するには、引き込み条件に加えた何らかの条件が必要である。その一つとして、各素子の ”非線形性が強すぎない” (例えば、分岐点に近い、Lyapunov exponent がゼロに近い、etc) ことがある。

これについては研究中で、カスケードのロバストネスの理解、さらに、スケール方向に伝達変換出来る／出来ない性質の区別に至るための重要な性質であると考えている。

4. 操作 (或は、依存性) に関する時間スケール方向の非対称性。
この場合、速いダイナミクスに遅い素子のパラメータ変化の依存性は見出されない。遅いダイナミクスはパラメーター (relevant) で速いダイナミクスが変数 (irrelevant) という断熱近似 (隷属化原理) の描像とは反対の関係である。

さらに、これらとほぼ同様な性質が、次節以降で論じる移流不安定な系でも要請される。

3 移流不安定性を介して

ここでは、隣あう振動子間の関係として、カオス的な不安定性の代わりに、convective instability(移流不安定性) という性質を導入したモデルを用いた場合を考える。この場合にも、中間的な時間スケールのダイナミクスの中継により、速いスケールから遅いスケールへ影響を与え得ること、そして、それが周期倍加カスケードという機構を介していることを示す。

3.1 移流不安定性 (convective instability)

移流不安定性とは、乱れを時間的には減衰するが空間的には増幅する不安定性であり [13]、開水路系 (open-flow system) ⁴ではよく見られる。例えば、水道の蛇口からでる水流が、上流の透明な層流から下流の白濁した乱流へと遷移していくのは、移流不安定性により揺らぎが流れに沿って増幅伝搬されていくことに因る [14]。

3.2 convective instability along time scales

このような不安定性を持つのは流体系に限らず、開放端で非対称な結合をした非線形振動子結合系などでも広く見られる。たとえば、以下のような activator-inhibitor 系を一方向結合した

⁴これに対し、周期境界の流れを閉水路系 (closed-flow system) と呼ぶ。

系

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i \{(1 - x_i)ax_{i-1} - by_i\} + K \\ \dot{y}_i = y_i(cx_i - dy_i) + K \end{cases} \quad (6)$$

を用意する。ここで、 $i = 0$ の境界に微小なノイズを加えると、移流不安定性により、ノイズの影響は時間的には増幅されないが空間的 (i 方向) に増幅して伝搬し、下流 ($i \gg 1$) で大振幅のダイナミクス (NSS: Noise-Sustained Structure) が生成されることが知られている [15]。上述の水道の蛇口に於ける層流から乱流への転移がこれに対応すると考えていただければよい。

これに、等比級数的時間スケール差を導入して、

$$\begin{cases} T_i \dot{x}_i = x_i \{(1 - x_i)ax_{i-1} - by_i\} + K \\ T_i \dot{y}_i = y_i(cx_i - dy_i) + K \\ T_i \equiv \tau^{i-1} T_1, \quad \tau > 1 \end{cases} \quad (7)$$

式 (3) に対応するモデルを構築する。この系の最上流 ($i = 1$) に微小ノイズを加えた場合の横

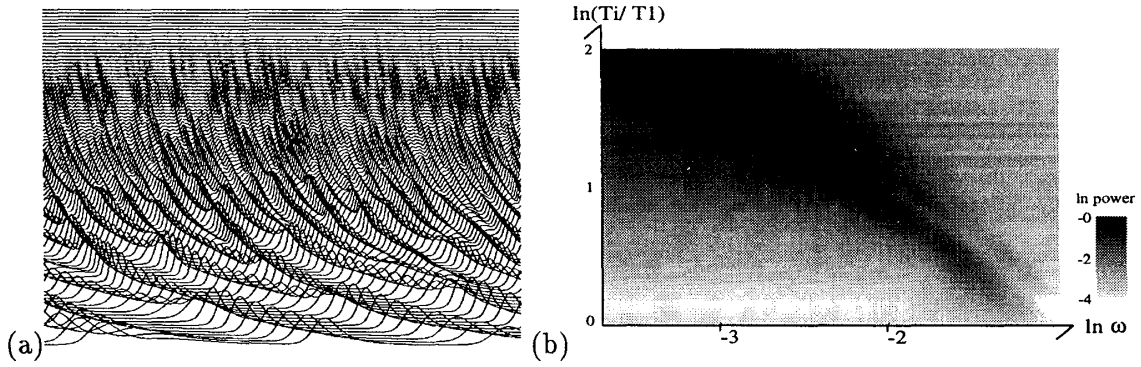


図 3: モデル式 (3) で、 $T_{total} = 100, L = 100$ として、最上流に微小ノイズを加えた場合の時空プロット (a) を示す。 (b) はそれらの素子のパワースペクトルをグレイスケール表示で示す。色が濃い程、値が大きい。

軸時間、縦軸空間 (i) のプロットが図 3(a) である。この場合にノイズを印加しなければ、全てのエレメントで固定点に収束するが、移流不安定性によりノイズが増幅伝搬されて下流で noise-sustained structure (NSS) が生成されている。 (b) はそれらの素子のパワースペクトルをグレイスケール表示を示す。横軸は周波数で、縦軸は各素子の特徴的時間スケールを対数で示す。下流にいくほど、ピークの色が濃くなっていくのは移流不安定性によりノイズが増幅伝搬されていることを反映し、それに加えてピークの位置が低周波側にずれていっている。即ち、揺らぎを増幅伝搬することに加え、揺らぎの時間スケールが遅くなっていっている。

3.3 Mechanism for the instability

前説で述べた時間スケールを遅くしていく揺らぎ増幅伝搬過程を、各素子の分散

$$V(i) \equiv \langle (x_i(t) - \langle x_i(t) \rangle)^2 \rangle \quad (8)$$

を用いて、 $T_{total} = 100$ の下で様々な τ について観察したのが図 4(a) である。上側の線ほど τ が小さく、これより NSS を生成するの十分な不安定性には、 τ がある程度小さいことが必要で

あることがわかる。1 素子当たりの揺らぎ増幅率を

$$\Lambda(i) \equiv \log \frac{V(i)}{V(i-1)} \quad (9)$$

で特徴づけて、 $L = 121$ の場合にこれの i 依存性を示したのが図 4(b) で、0 のまわりを振動している。

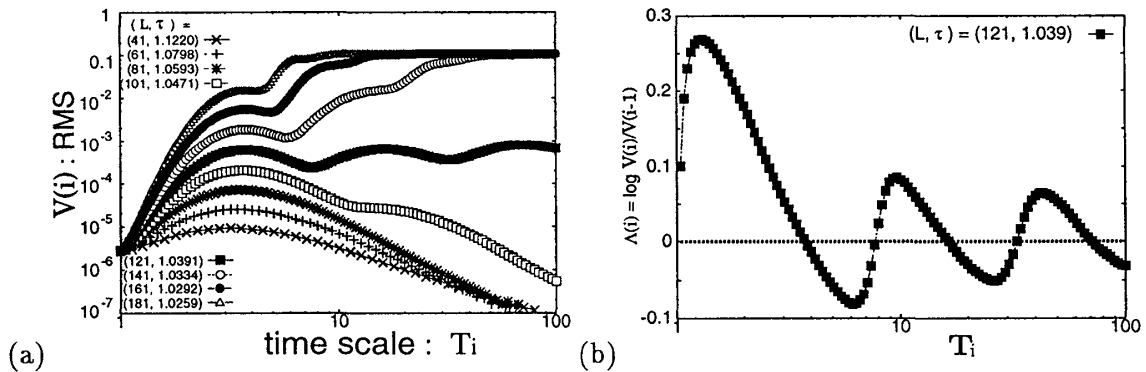


図 4:

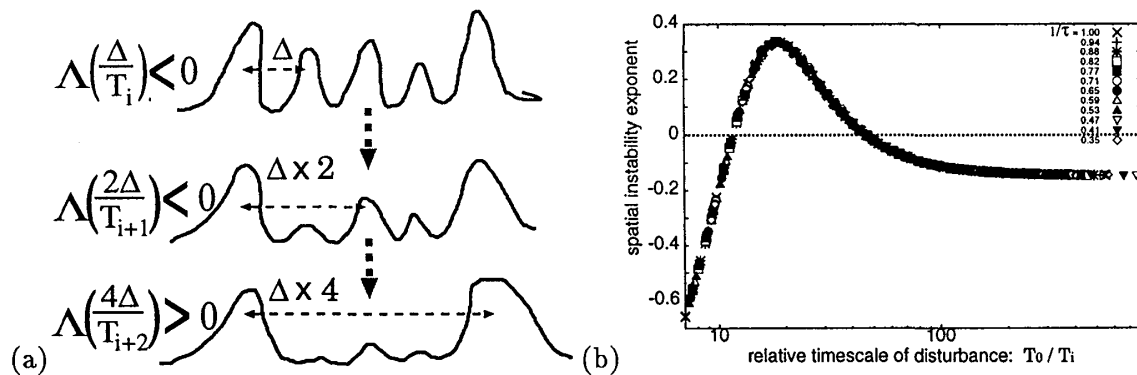


図 5:

Λ が負から正に至る過程では図 5(a) で示すような揺らぎの周期倍加が起こっている。図 5(b) は、縦軸に揺らぎの時間スケール T_0 を各素子の時間スケール T_i で割って相対化した時間スケールを、縦軸にそれに対する空間増幅率 Λ を示す。揺らぎの時間スケールが不変なまま下流へ伝搬されるとすると、 T_i が大きくなるので T_0/T_i は小さくなり図中では左側にシフトしていき、 $T_0/T_i \sim 10$ で正から負になる。 Λ が負になると、揺らぎの一部を潰して周期を長くするとことで Λ を正の領域に移す周期倍加が、図 5(a) のように発生する。以上を 1 サイクルとしてそれが何回も繰り返すことで、最上流に印加された揺らぎの時間スケールが遅くなっていく。このとき、 $\log \sigma \sum_i \Lambda(i) \sim 1$ なる i で NSS が生成される。⁵このような周期倍加の繰り返しの周期倍加カスケードと呼ぶ。

⁵ σ は最上流に印加したノイズの強度。カオス系で δ の擾動を加えたときに、その影響が t step 後にマクロレベルに増大する条件が、 $\log \delta \sum_t \lambda(t) \sim 1$ あることを思い出されたい。 $\lambda(t)$ は各ステップの軌道不安定性指数とする。

3.4 速いダイナミクスへの遅いダイナミクスの依存性

前節で述べた周期倍加カスケードを利用して、速いダイナミクスの統計的性質を遅いダイナミクスへ伝搬しうることを以下の第2章と同様な数値実験を通して示す。

実験: $A \sin(\frac{2\pi}{T_0}t) + \eta$ を $i = 1$ に印加する。正弦波の周期 $T_0 \sim T_1 \ll T_L$ で振幅 $A \ll 1$ であり、 η はノイズでその強度 $\sigma \ll 1$ とする。 T_0 は速いスケールの統計的性質であり、下流(遅いスケール)のダイナミクスの T_0 依存性を調べる。

図6(a)は、図3(a)と同様の時空プロットを示し、図中の左から1/4ぐらいの時間で $T_0 = 30$ から80に変えている。下部の遅いダイナミクスを見ると、右側では遅い時間スケールのNSSが生成されているが、左側ではほとんど生成されていない。遅いスケールのNSSの時間スケール

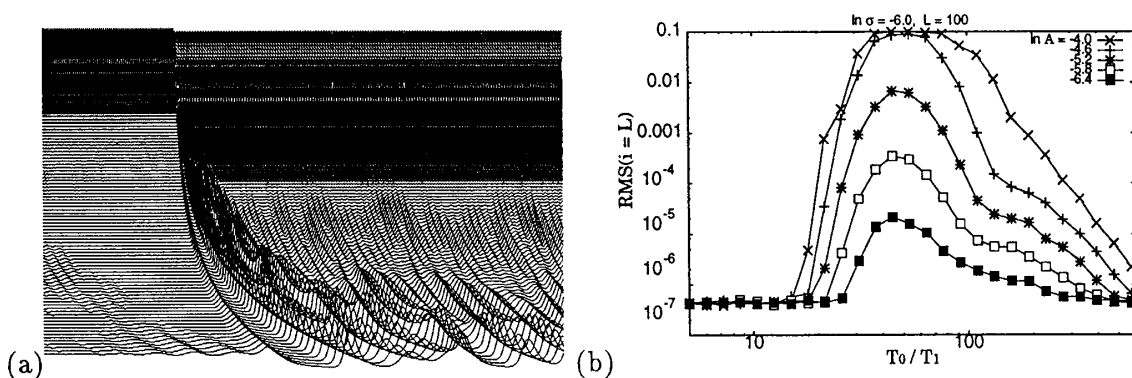


図 6: (b) のマークの違いは、凡例に示すように A の違いを表す。 $\sigma = 10^{-6}$ 。

が T_0 より十分遅いのはわかっているので、遅いスケール統計的性質として $i = L$ の分散 $V(L)$ を用いる。図6(b)は、横軸に T_0 、縦軸に $V(L)$ を示す。 T_0 がある範囲内であるときにかぎり $V(L)$ が大きい、即ち、遅いスケールのNSSが生成可能であることが示されている。

この生成機構は、前節で述べた周期倍加カスケード過程を解析することで理解される。図7(a)は様々な T_0 に対する $V(i)$ の、(b)は $\Lambda(i)$ の i 方向の発展を示す。 T_0 の異なりに応じて、振動の位相と増幅率(大まかな傾き、平均的な移流不安定性の強さ)が異なる。これらの違いの蓄積が、下流(遅いスケール)でのダイナミクスの統計的性質の差異を引き起こしている。

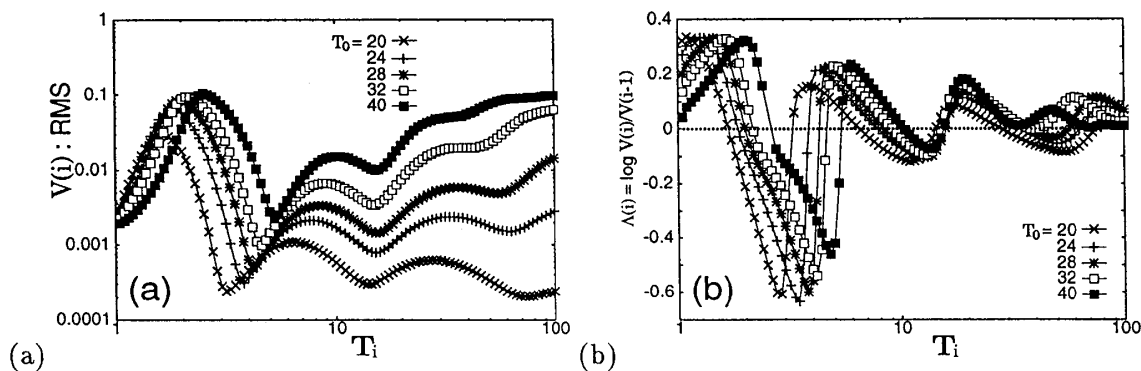


図 7:

標語的に言うと、周期倍加カスケードの変調を通して、速いダイナミクスは遅いダイナミクス

へ影響を与えることができています。速いダイナミクスの統計的性質 T_0 を初期値として、遅いダイナミクスの統計的性質を終状態と考えると 1 次元写像と表 1 のような対応がつく。

	dynamics along time scales	1-d map
each step	space: i or time scale: T_i	time step: n
initial state	fast scale property T_0, A, σ	x_1
final state	slow scale property $V(L)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
instability	convective instability $\lambda^S \left(\frac{\Delta(i)}{T_i} \right)$	linear instability $\log \left \frac{df(x_n)}{dx_n} \right $
difference of initial state	δT_0	δx_1
its sensitivity	$\sum_{i=1}^{i=L} \left\{ \lambda^S \left(\frac{\Delta(i)}{T_i} \right) \Big _{T_0 + \delta T_0} - \lambda^S \left(\frac{\Delta(i)}{T_i} \right) \Big _{T_0} \right\}$	$\sum_{n=1}^n \log \left \frac{df(x_n)}{dx_n} \right $

表 1: 1-d map $x_{n+1} = f(x_n)$ との対応。 $\Delta(i)$ は、各素子での揺らぎの平均的な時間スケールを示す。これは、 T_i に近いが必ずしも一致せず、 $V(i)$ と同様に振動する。

4 議論

4.1 共通する機構

各章で述べた、速いダイナミクスから遅いダイナミクスへの影響を与える機構を図 2 にまとめる。2 章最後のまとめでも述べたが、ある種のカスケードを通し速いスケールのダイナミクスへの遅いダイナミクスの依存性の実現している。ここで、速いスケールから遅いスケールへ伝搬されている情報は、分岐を誘起するということである。

single element	Lorenz (chaos)	convective instability
coherence	引き込みとその崩壊	波の増幅と伝搬
cascade	分岐	周期倍加
fast \rightarrow slow	modulation of the cascade	
τ_{min}	○	×
τ_{max}	○	○
slow \rightarrow fast	×	△

表 2: 各章のまとめ。 τ_{min}, τ_{max} は fast \rightarrow slow が可能な τ の最大、最小値を示す。 fast \rightarrow slow は、 fast \rightarrow slow が可能な τ において、遅い素子のパラメータへの速い素子の依存性の有無を指す。

近いスケールのダイナミクス間のコヒーレンスを介したカスケード機構の普遍性を理解すべく以下の問題を意識して研究に現在取り組んでいる。

1. カスケード過程のロバストネス。或は、どういう場合に global に (系全体に渡って) カスケードがおこるか。
2. カスケード過程では、何が伝搬／散逸するか。
3. "fast \rightarrow slow" は可能だが、"slow \rightarrow fast" は不可能というスケール方向の非対称性。

上表中の両者で共通しない部分もあり、1 つめは τ_{min} の存在についてで、2 つめは遅い素子のパラメータへの速い素子の依存性の可否である。これは、移流不安定性の時間的な安定性とカオスの時間的な不安定性に起因するものと考えられる。

4.2 空間バージョンへの応用 —— 階層的 Turing pattern ?

本論で論じた中間的スケールによる中継の効用を、時間スケールの代わりに空間スケールが混在する系で探索するのもおもしろい問題であると考えている。冒頭にも述べたが、生態系の問題としても然りである。本論で紹介したモデルの式 (1) の振動子の代わりに、Turing pattern を形成する反応拡散方程式を用い、式 (2) の時間スケール変換の代わりに、空間スケール変換を施して、近いスケールの反応拡散系同士を反応マトリックス上で相互作用させる。このような系において、本論で述べたカスケードの空間バージョンの存在を通して、様々な空間スケールで生成されるパターンの中で何らかのコヒーレンスが生み出される機構を探索中である。

Skinner によれば、中世中国の市場構造を見ると、様々な空間スケールが存在するとともに、各スケールを貫く相関があるという [16]。このような階層を貫く相関生成機構をパターンダイナミクス (歴史) をふまえて理解していくこと [17] にも大きな貢献ができると考えている。

4.3 展望

以上の発展問題と並行して、冒頭に述べた現象への応用を視野にいたった次のようなアプローチを通して動的なメモリー観 [18, 19] を豊かにしていきたいと考えている。

速いスケールの sensory なダイナミクスから遅いスケールの記憶ダイナミクスへの動的作用として記憶書き込み過程を、その逆方向の動的作用として記憶読みだし過程を理論化する。これらを基に、走化性における感作的行動と適応的行動の間の動的な制御 (response-regulator) モデル [4] の再解釈し、そこからさらに適応するだけでなくさらに長いスケールの記憶や履歴を持った走化性 [20] を理解したい。さらに、高次学習や長期／短期記憶のような階層的な情報処理を以下のように動的に捉えた理論構築も行っていきたい。高次の機能が顕在化するのは、1 つ低次の (速い) ダイナミクスでの不安定化により、高次の (遅い) ダイナミクスが不安定化が誘起される過程と捉える [21] のである。

また同所的種分化において、速いダイナミクスである表現型の分化 (分岐) が遅いダイナミクスである遺伝型の分化 (分岐) を引き起こすという進化理論が金子と四方によって提出されており、通常変数と考えられる遺伝型からパラメーターと考えられる表現型への情報伝達が行われる場合には、本論と似た分岐カスケードが起こっている。

※本論との直接的な関係は現在のところついていないが、履歴や記憶の形成過程を力学系の観点から理解する試みとしては、石原による粉体の履歴依存性のモデル [23] がある。重さ (資源) の取り合いの非線形性のある種の移流不安定性を通して、履歴が形成される条件やその過程が記述できており、力学系の威力が発揮されている。

謝辞：本研究は金子邦彦さんとの協同研究であり、日々の議論に感謝します。また、栗津暁紀、池上高志、石原秀至、小松崎民樹、佐々真一、佐藤譲、柴田達夫、高木拓明、茶碗谷毅、津田一郎、中尾裕也、松尾美希、四方哲也の皆様にも刺激的な議論や建設的なコメントをしていただきました。

参考文献

- [1] 多賀巖太郎, 物性研究, **68** pp.522-529.(1997)
- [2] 川上 紳一, 縞々学 (東京大学出版会 1995)
- [3] 大沢 文夫, 講座：生物物理 (丸善 1998)
- [4] D.E.Koshland, *Science*. **196** 1055-63 (1977); *Annu. Rev. Neurosci.* **3** 43-75 (1980).
- [5] 戸田 幹人, 物性研究 **74** pp.597-643 (2000)
- [6] 小松崎 民樹, 物性研究 **76** pp.1-44
- [7] S.A.Levin, *Ecology* **73** pp.1943-1967 (1992).
- [8] *Ecosystems*, **3** (2000) の 1 1 月号。
- [9] H.Haken, *Synergetics* (Springer 1977); 和訳：協同現象の数理 (東海大学出版会)
- [10] M.Yamada and K.Ohkitani, *Phys.Rev.Lett.* **60** (1988) pp.983-986.
- [11] K.Fujimoto and K.Kaneko, preprint, nlin.CD/0108038
- [12] Y.Kuramoto, *Chemical Oscillation, Waves, and Turbulence* (Springer 1984).
- [13] E.M.Lifshitz and L.P.Pitaevskii, *Physical Kinetics*, Chapter 6 (Pergamon 1981).
邦訳：物理的運動学 第6章 (東京図書 1981).
- [14] M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, (The Parabolic Press 1982).
- [15] R.J.Deissler, *J.Stat.Phys.* **40** 371-395 (1985).
- [16] G.W.Skinner, *The Journal of Asian Studies*, **24** pp.3-43 (1964); **24** pp.195-399 (1965).
- [17] 安富歩, private communication. 文献 [16] も教えていただきました。
- [18] I.Tsuda, *Neural Networks* **5** 313 (1992);
- [19] A.Skarda and W.J.Freeman, *Behavioral and Brain Sciences* **10** 161 (1987)
- [20] E.F.Foxman, *et.al*, *J.Cell.Biol* **147** 577-587 (1999).
- [21] 佐藤譲, private communication.
- [22] K.Kaneko and T.Yomo, *Proc.R.Soc.Lond.* **257B** pp.2367 (2000).
- [23] 石原 秀至, 物性研究 **77** pp.153-194 (2001)